Axiomatization: Chaos and Ergodicity

Sungjin Yang

November 19, 2026

Online version: https://redoc.wops.dev/ergodicity/

시작하기에 앞서, 이후의 논의가 전부 OSR을 전제로 삼기 위해 제가 OSR-ist라는 것을 고백해야 할 것 같습니다. Scientific Realism에 관해 저와 믿음을 달리하시는 분들에게는 이 글의 신뢰성이 떨어져 보일지 모르겠습니다만, 부디 이해해주시기 바랍니다.

자, 이제 본론으로.

이 글에서 저는 axiomatization을 향한 제 목표를 드러냈습니다. 더 깊은 논의를 위해 axiomatization을 향한 제 목표를 보다 구체적으로 적어보겠습니다.

> 어떤 phenomena $\mathcal{P}$을 가장 잘 설명하는, 즉 이미 증명된 정리들이 $\mathcal{P}$에 대한 서술로 그대로 transfer되며 $\mathcal{P}$의 property들이 이에 의해 설명되는 mathematical structure S^*를 추상적인 현대 수학에서 찾는 것

OSR에 의해 존재하는 $\mathcal{P}$의 metaphysical representation을 S_0라고 두고, (S_0를 직접적으로 알 수는 없으니) 우리가 $\mathcal{P}$를 설명할 때 사용하는 approximate representation을 S_1라고 하겠습니다. 좋은 $S_1 \preceq S^* \preceq S_0$의 조건은 여러가지가 있겠지만, 다음 lower bound 조건에 대해선 unanimous하리라 생각합니다.

- S^*가 우리의 관심사에 있는 property를 효과적으로 다루기에 충분히 fine할 것 (즉, S^*에 대해 알려진 proposition이 해당 property를 규명하는 데 있어 practical할 것)

이 글에서는 다음 upper bound 조건을 추가하고자 합니다.

- S^*가 regular할 것

이 조건을 추가하게 된 계기는 중간고사가 끝나고 한 intellect와 나눈 대화였습니다. 담론 중 제기된 가장 큰 우려는 **"S_0가 chaotic한 경우 제 목표가 여전히 실효적인가?"** 여부에 있었습니다. 아무래도 이 조건을 달성해야지만 비로소 목표하는 바에 도달했다고 말할 수 있겠죠. 관건은 이 두 조건이 동시에 달성될 수 있느냐는 것입니다. 당시에는 제가 chaos theory에 대해 미숙했던 터라 답하지 못했지만, 기숙사에 돌아온 뒤 다음과 같이 생각을 정리할 수 있었습니다.

1. 어떤 system이 chaotic하다는 표현은 prediction의 대상이 되는 property가 존재해야 합니다. 달리 말해, $\mathcal{P}$에 대한 property P에 대해 chaotic한 system이 또다른 property Q에 대해서는 regular할 수 있다는 것입니다. 가령, T가 chaotic하게 evolve하더라도 ergodic한 경우, $f \circ T^i(x)$의 Time Average $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$는 (거의 모든 initial state에 대해 constant이므로) regular해질 수 있습니다.

   Theorem (Birkhoff Ergodic Theorem; variant from [1]) Let (X, Σ, μ, T) be a measure-preserving system with $\mu(X) = 1$ and T ergodic. For any $f \in \mathcal{L}^1_\mu$,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

   for almost every $x \in X$.

2. 이는 우리가 관심을 가지는 property P에 대해 chaotic한 system S_0을 단순화한 system S^* 위에서는 coarse-grained P가 regular할 수 있다는 것입니다 [2]. 따라서, P에 대한 정확한 서술은 어렵다 하더라도 (애초에 chaotic한 S_0 위에서도 P에 대한 정확한 서술은 practical하지 않으므로 S_0를 고집하는 것은 부적절합니다) 적어도 이에 대한 insight를 제공할 수 있습니다.

*Chaos*는 *axiomatization*을 향한 제 갈망을 꺾지 못합니다!

---

[1] Yunis, D. (2017). *The Birkhoff ergodic theorem with applications* [REU paper]. University of Chicago. https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Yunis.pdf

[2] Frigg, R., Berkovitz, J., & Kronz, F. (2025). The ergodic hierarchy. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Winter 2025 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/win2025/entries/ergodic-hierarchy/